第8卷第1期 1991年 1月
复 合 材 料 学 报
ACTA MATERIAE COMPOSITAE SINICA
Vol.8 No.1 January 1991

含有流动液体的复合材料管道的振动

闻 立 洲

武汉钢铁学院应用力学研究室，武汉430081

摘要：本文讨论了含有流动液体与复合材料管道的耦合振动问题．其方法是引入位移函数，将文献[1]中关于考虑沿厚度方向的剪切变形及转动惯量的正交各向异性圆柱层壳的五个微分方程式转化成一个微分方程式．在此基础上，借助于文献[2]中动水压力公式，研究了无限长度复合材料管道在平均流速为U时的振动问题，作了数值计算，得到了一些有意义的结果。

关键词：复合材料管道，流动液体，振动

一、引 言

复合材料结构日渐广泛应用于工程实际，对含有流动液体（例如水）的复合材料管道的研究无疑是有意义的。目前的情况是复合材料管道的静力分析尚能见到一些文献如[4]，但是还没有见到含有流动液体的复合材料管道振动这方面的文章。从结构设计的角度来考虑，研究复合材料管道的振动，主要是找出管道的自振频率，避免与泵所产生的压力波动频率相接近。

研究复合材料管道的振动，必然会碰到以下两个问题：第一，管壁的运动方程式的采用，当然考虑剪切变形理论是要精确一些，但是，不加变动地运用壳体的五个微分方程式，处理一些问题（特别是处理加筋管道）就不方便。为此，我们用文献[1]中的方程式为基楚，引入位移函数$\phi_3(x, y, t)$，于是文献[1]中的五个微分方程式可以化成用位移函数表示的一个微分方程式。利用它不仅能解管道的振动，而且能解其它的一些力学问题。应当指出的是：在本文所推导控制方程式中，若输入文献[1]中有关算例的参数，能得到与该文中完全相同的相应数值结果。第二，管壁与液体耦连振动中所产生的动水压力之计算，郑哲敏[2]早年在均匀各向同性水管研究中有过这方面的工作，他指出："管道中的平均流速U，这也是常数，伴随着管道振动而出现的速度变化可以看作附加于U的小量，同时我们略去流体的可压缩性及粘性，这样，便可以根据线性化后的位势理论来计算流速和水压力的波动"。这些论述无疑在流速U不大时也可以应用于复合材料管道中。以上两个问题就是本文工作的基楚。

本文1990年1月收到

二、基本方程式

(一) 管壁的运动方程式

考虑沿壳体厚度方向的剪切变形及转动惯量的正交各向异性园柱层壳，采用线性理论，其基本方程式为[1]：

$$L_{11}U_0+L_{12}V_0+L_{13}\varphi_x+L_{14}\varphi_y+L_{15}w=0 \tag{1}$$

$$L_{12}U_0+L_{22}V_0+L_{23}\varphi_x+L_{24}\varphi_y+L_{25}w=0 \tag{2}$$

$$L_{13}U_0+L_{23}V_0+\left(L_{33}-I\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi_x+L_{34}\varphi_y+L_{35}w=0 \tag{3}$$

$$L_{14}U_0+L_{24}V_0+L_{34}\varphi_x+\left(L_{44}-I\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi_y+L_{45}w=0 \tag{4}$$

$$L_{15}U_0+L_{25}V_0+L_{35}\varphi_x+L_{45}\varphi_y-L_{55}w=q_1 \tag{5}$$

我们引入位移函数ϕ_3 (x, y, t) 其推导过程见附录（一），推导方法类似于文献[5] 中方法，使

$$U_0=C_3F_1\phi_3\ (x,y,t) \tag{6}$$

$$V_0=C_2F_1\phi_3\ (x,y,t) \tag{7}$$

$$w=C_1F_1\phi_3\ (x,y,t) \tag{8}$$

$$\varphi_x=F_3\phi_3\ (x,y,t) \tag{9}$$

$$\varphi_y=F_2\phi_3\ (x,y,t) \tag{10}$$

在以上诸式中，$L_{11}\sim L_{55}$为微分算子，它们均由文献[1] 中确定，而C_1，C_2，C_3，F_1，F_2，F_3为推导过程中出现的微分算子，它们由附录（一）中的（7），（8），（10）及（18），（19），（24）给出。将（6），（7），（8），（9），（10）分别代入（1），（2），（3），（4），（5）之后，可以证明（1），（2），（3），（4）均为等于零的恒等式，而（5）式则可转化成：

$$L_{15}C_3F_1\phi_3+L_{25}C_2F_1\phi_3+L_{35}F_3\phi_3+L_{45}F_2\phi_3-L_{55}C_1F_1\phi_3=q_1 \tag{11}$$

在上式中q_1为广义力，它由下式确定：

$$q_1=-\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\rho_0 h\frac{\partial^2 w}{R^2\partial\theta^2}+p_t \tag{12}$$

ρ为管子密度，h为管壁厚度。σ_0为没有振动时流体在管壁的园周方向法向应力，是常数。p_t为振动时作用于管壁的扰动水压力。

(二) 扰动水压力之计算及管道振动的解

如果略去液体的粘性及可压缩性，用φ表示振动时流速的位势函数，用U及ρ_f分别表示流体的平均流速及密度，则液体的扰动压力p_t可以用下列条件计算[2]：

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0 \tag{13}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=R}=\frac{\partial w}{\partial t}+U\frac{\partial w}{\partial x} \tag{14}$$

$$p_t=-\rho_f\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+U\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{r=R} \tag{15}$$

设 $w=A\sin m\theta\cdot e^{i(\omega t-kx)}$ (16)

则从 (13) ～ (15) 可以求出p_t为：

$$p_t=\rho_f(\omega-Uk)^2\frac{I_m(kR)}{k\,I_m'(kR)}w \tag{17}$$

在 (16) 及 (17) 式中：m为整数，w为圆频率，k为实数，A为任意常数，$I_m(kR)$ 是第一类m级变相贝塞尔函数，$I_m'(x)$ 是$I_m(x)$ 对x的一阶导数，R为壳体半径。

对控制方程式 (11) 两边施以C_1F_1运算，并注意到 (8) 式（即$w=C_1F_1\phi_3$），再将 (12) 式代替 (11) 中的q_1，于是我们得到用挠度w表示的管道振动方程式：

$$L_{15}C_3F_1w+L_{25}C_2F_1w+L_{35}F_3w+L_{45}F_2w-L_{55}C_1F_1w$$
$$=C_1F_1\left[-\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\sigma_0 h\frac{\partial^2 w}{R^2\partial\theta^2}+\rho_f\cdot R(\omega-Uk)^2\frac{I_m(kR)}{kR\,I_m'(kR)}w\right], \tag{18}$$

将 (16) 式代入上式，并注意到$y=R\theta$，于是我们可以得到对于指定了m及k时计算频率ω的方程式：

$$SL_{15}\cdot SC_3\cdot SF_1+SL_{25}\cdot SC_2\cdot SF_1-SL_{35}\cdot SF_3-SL_{45}\cdot SF_2-SL_{55}\cdot SC_1\cdot SF_1$$
$$=SC_1\cdot SF_1\left[\rho h\omega^2-\sigma_0 h\beta_m^2+\rho_f R(\omega-Uk)^2\frac{I_m(kR)}{I_m'(kR)\cdot kR}\right] \tag{19}$$

在上式中：SL_{15}，SL_{25}，SL_{35}，SL_{45}，SL_{55} 分别由附录中 (32)，(35)，(38)，(40) 及 (41) 确定；SC_1，SC_2，SC_3 分别由附录中 (60)，(61) 及 (62)确定；SF_1，SF_2，SF_3分别由 (65)，(66) 及 (67) 确定；β_m由 (26) 确定。当流速 U 遇到某限度时，振动就成为不稳定了。对于一定的m，产生不稳定振动现象的流速可以由 (19) 式中使$\omega=0$而得到：

$$U=\sqrt{\frac{H_1}{H_2}} \tag{20}$$

在上式中

$$H_1=SL_{15}\cdot SC_3\cdot SF_1+SL_{25}\cdot SC_2\cdot SF_1-SL_{35}\cdot SF_3-SL_{45}\cdot SF_2$$
$$-SL_{55}\cdot SC_1\cdot SF_1+SC_1\cdot SF_1\cdot\sigma_0 h\beta_m^2 \tag{21}$$

$$H_2=\rho_f k\cdot SC_1\cdot SF_1\frac{I_m(kR)}{I_m'(kR)} \tag{22}$$

可以根据不同的m值由 (20) 式求出最小的流速，便是临界流速。

三、算例

壳体：计算参数采用文献[1]中第 (7) 号算例，除长度是采用无限长外，其余的参数都与之相同。流体是水，$\rho_f=1.00\times10^3$千克/米^3，流速U采用了若干数值如下表中所示。

计算方案是按空管（$U=0$，$\rho_f=0$），有流体但无流速（$\rho_f\neq0$，$U=0$）以及流速不同等几种情况进行计算，全部数值计算是由IBM-5550计算机完成的，计算结果列表如下：

ω之计算结果表 (rad/sec)

m	KR	空管 U=0, $\rho_f=0$	有流体时流速U变化情况 U=0,	U=2米/秒	U=4米/秒	U=6米/秒	U=8米/秒	U=10米/秒	U=12米/秒
2	.073	5189.0	1126.7	1139.4	1153.8	1166.4	1179.7	1192.1	1205..
	2.262	5541.9	1227.7	1242.8	1256.3	1270.7	1285.5	1300.4	1313.8
	2.450	5884.9	1330.5	1346.2	1361.7	1376.5	1392.6	1 .07.7	1423.8
	2.639	6208.7	1432.6	1449.7	1465.6	1482.8	14 9.3	1515.7	1532.4
3	0.188	5363.6	1233.9	1235.4	1236.5	1237.5	1238.7	1239.8	1242.3
4	0.188	9016.2	2373.7	2374.4	2376.6	2377.7	2378.2	2379.5	2380.6
5	0.188	13295.5	3879.3	3880.6	3881.4	3882.7	3883.6	3885.7	3886.4

(在上表中R=0.3m)

在本例中，当m=4，k=15.707时，可由（20）式找出具临界流速U_{cr}=33.5米/秒。对于在本例中复合材料管道而言，实际流速如果不超过这个临界流速，可按本文之公式计算自振频率。

四、结语

本文讨论了含有流动液体与复合材料管道的耦合振动问题，由于引入了位移函数ϕ_3，将文献[1]中考虑沿厚度方向剪切变形的正交各向异性园柱壳体的5个微分方程式转化成一个用ϕ_3所表示的微分方程式(也可化成用挠度w表示的微分方程式)。应用了线性化后的位势理论[2]计算了作用于复合材料管道的扰动压力，得到了含有流动液体的无限长管道的频率计算方程式。

算例的数值计算表明：（1）当m及k一定时，复合材料管内充满流体的所有频率都较没有流体的空管低：（2）管内的流速不大的情况下，流速对自振频率的影响也是不大的。(即使是在算例中U=12米/秒这样的流速下，频率影响也只在7%以内。)

参 考 文 献

〔1〕 王震鸣，戴福陵，吕明身"复合材料的多层，夹层和加筋园柱曲板的稳定和振动"固体力学学报1984年12月第4期 513-517

〔2〕 郑哲敏，"输水管的振动问题"，1958年4月，2卷 2期 100-111

〔3〕 郑哲敏，"管道的振动"清华大学学报2(1956) 32-39

〔4〕 A.S.Tooth, W.M.Banks and D.H.A.Rahman, "The Analysis of Special Orthotropic GRP Multi-Layered Pipes Subjected to Fluid Loading", Proceedings International Symposium on Composite Materials and Structures, 1986, Beijing

〔5〕 阎立洲，"纵向稀加筋复合材料园柱壳的稳定分析，"复合材料学报，1989，Vol6，No2，

附录：位移函数ϕ_3的推导及有关公式

一、关于ϕ_3的推导

（一）由文中的（1），（2），（3），（4），中消去φ_x。

先由（1），（2）两式中消去φ_x，其方法是对（1）施以L_{23}运算，对（2）施以L_{13}运算，然后相减，记为$L_{23}(1)-L_{13}(2)$，今后碰到这类似符号就有与之类似意义，不再重述。

由：$L_{23}(1)-L_{13}(2)$，得到$R_1U_0+R_2V_0+R_3\varphi_y+R_4w=0$，　　$(\dot{1})$

同理：$L_{34}(3)-\left(L_{33}-\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(4)$，得到$S_1U_0+S_2V_0+S_3\varphi_y+S_4w=0$，　　$(\dot{2})$

$L_{34}(1)-L_{13}(4)$，得到：$T_1U_0+T_2V_0+T_3\varphi_y+T_4w=0$，　　$(\dot{3})$

在以上诸式中：

$R_1=L_{23}\cdot L_{11}-L_{13}\cdot L_{12}$，　　$T_1=L_{11}\cdot L_{34}-L_{13}\cdot L_{14}$

$R_2=L_{23}L_{12}-L_{13}\cdot L_{22}$；　　$T_2=L_{12}\cdot L_{34}-L_{13}\cdot L_{24}$

$R_3=L_{23}\cdot L_{14}-L_{13}\cdot L_{24}$；　　$T_3=L_{14}\cdot L_{34}-L_{13}\left(L_{44}-I\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)$

$R_4=L_{23}\cdot L_{15}-L_{13}\cdot L_{25}$；　　$T_4=L_{15}\cdot L_{34}-L_{13}\cdot L_{45}$

$$S_1=L_{34}\cdot L_{13}-L_{14}\left(L_{33}-I\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)$$

$$S_2=L_{34}\cdot L_{23}-L_{24}\left(L_{33}-I\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)$$

$$S_3=(L_{34})^2-\left(L_{33}-I\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(L_{44}-I\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)$$

$$S_4=L_{34}\cdot L_{35}-L_{45}\left(L_{33}-I\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)$$

（二）由$(\dot{1})$，$(\dot{2})$，$(\dot{3})$中消去φ_y

由$S_3(\dot{1})-R_3(\dot{2})$　　得到：$A_1U_0+A_2V_0+A_3w=0$　　$(\dot{4})$

由$T_3(\dot{2})-S_3(\dot{3})$，　得到：$B_1U_0+B_2V_0+B_3w=0$　　$(\dot{5})$

在$(\dot{4})$及$(\dot{5})$中

$A_1=R_1S_3-R_3S_1$；　　$B_1=S_1T_3-S_3T_1$；

$A_2=R_2S_3-R_3S_2$；　　$B_2=S_2T_3-S_3T_2$；

$A_3=R_4S_3-R_3S_4$；　　$B_3=S_4T_3-S_3T_4$；

（三）由$(\dot{4})$及$(\dot{5})$消去U_0

由$B_1(\dot{4})-A_1(\dot{5})$得到：

$$(A_2B_1-A_1B_2)V_0=(A_1B_3-A_3B_1)w \qquad (\dot{6})$$

若上式成立，一定存在一函数ϕ_1，使

$$V_0=(A_1B_3-A_3B_1)\phi_1$$

$$w=(A_2B_1-A_1B_2)\phi_1$$

令 $$C_1=A_2B_1-A_1B_2 \tag{7}$$

$$C_2=A_1B_3-A_3B_1 \tag{8}$$

因此有

$$V_0=C_2\phi_1,\qquad w=C_1\phi_1 \tag{9}$$

同理：在（4）及（5）中消去V_0，很容得到

$$U_0=C_3\phi_2,\qquad w=C_1\phi_2, \tag{A}$$

将（9）式中之w与（A）式中之w相比，可以得到

$$\phi_1=\phi_2 \tag{10}$$

在（A）式中：$C_3=A_3B_2-A_2B_3$ （10）

$$\therefore U_0=C_3\phi_1 \tag{11}$$

现在我们来推导φ_x及φ_y用位移函数的表示式．将（9）及（11）代入（1）式可以得到

$$L_{13}\varphi_x+L_{14}\varphi_y+D_1\phi_1=0 \tag{12}$$

将（9）及（11）代入（3）式可以得到

$$\left(L_{33}-I\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi_x+L_{34}\varphi_y+D_2\phi_1=0 \tag{13}$$

在（12）及（13）中

$$D_1=L_{11}C_3+L_{12}C_2+L_{15}C_1 \tag{14}$$

$$D_2=L_{13}C_3+L_{23}C_2+L_{35}C_1 \tag{15}$$

由$\left(L_{33}-I\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)$（12）$-L_{13}$（13），可以得到

$$F_1\varphi_y=F_2\phi_1$$

上式成立，一定存在一函数ϕ_3使

$$\varphi_y=F_2\phi_3, \tag{16}$$

$$\phi_1=F_1\phi_3. \tag{17}$$

在上式中：

$$F_1=L_{13}L_{34}-L_{14}\left(L_{33}-I\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \tag{18}$$

$$F_2=D_1\left(L_{33}-I\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)-L_{13}D_2 \tag{19}$$

在（12）及（13）中消去φ_y 由L_{34}（12）$-L_{14}$（13）可以得到

$$F_1\varphi_x=F_3\phi_1, \tag{20}$$

若上式成立，一定存在一函数ϕ_4使

$$\phi_1=F_1\phi_4 \tag{21}$$

$$\varphi_x = F_3\phi_4 \tag{22}$$

比较（17）及（21）可以得到　　$\phi_4=\phi_3$　　(23)

在（22）中

$$F_3 = L_{14}D_2 - L_{34}D_1 \tag{24}$$

综合（9），（11），（16）及（22），并考虑到（10）及（23）可得到

$$U_0 = C_3\phi_1 = C_3F_1\phi_3 \qquad V_0 = C_2\phi_1 = C_2F_1\phi_3$$

$$w = C_1\phi_2 = C_1\phi_1 = C_1F_1\phi_3 \qquad \varphi_x = F_3\phi_4 = F_3\phi_3 \qquad \varphi_y = F_2\phi_3$$

由此正文中（6），（7），（8），（9），及（10）已推导完毕。

（二）正文（19）式中的有关参数

将（16）式，即 $w = A\sin m\theta\ e^{i(\omega t - kx)}$ 代入（18）式中。

令

$$\alpha_n = -k,\ SI = I, \tag{25}$$

$$\beta_m = \frac{m}{R}, \tag{26}$$

可以得到：

$$SL_{11} = -A_{11}\alpha_n^2 - A_{55}\beta_m^2, \tag{27}$$

$$SL_{12} = (A_{12}+A_{55})\alpha_n\beta_m, \tag{28}$$

$$SL_{13} = -B_{11}\alpha_n^2 - B_{66}\beta_m^2 \tag{29}$$

$$SL_{14} = (B_{12}+B_{66})\alpha_n\beta_m, \tag{30}$$

$$SL_{23} = (B_{12}+B_{65})\alpha_n\beta_m, \tag{31}$$

$$SL_{15} = \frac{A_{12}}{R}\alpha_n \tag{32}$$

$$SL_{22} = -A_{56}\cdot\alpha_n^2 - A_{22}\beta_m^2 - f_1C_{44}/R^2, \tag{33}$$

$$SL_{24} = -B_{66}\cdot\alpha_n^2 - B_{22}\beta_m^2 + f_1C_{44}/R, \tag{34}$$

$$SL_{25} = (A_{22}+f_1C_{44})\beta_m/R, \tag{35}$$

$$SL_{33} = -D_{11}\alpha_n^2 - D_{55}\beta_m^2 - C_{55}, \tag{36}$$

$$SL_{34} = (D_{12}+D_{65})\alpha_n\beta_m, \tag{37}$$

$$SL_{35} = (B_{12}/R - C_{55})\alpha_n, \tag{38}$$

$$SL_{44} = -D_{65}\alpha_n^2 - D_{22}\beta_m^2 - C_{44}, \tag{39}$$

$$SL_{45} = (B_{22}/R - C_{44})\beta_m, \tag{40}$$

$$SL_{55} = -A_{22}/R^2 - C_{55}\alpha_n^2 - C_{44}\beta_m^2, \tag{41}$$

$$SR_1 = SL_{11}\cdot SL_{23} - SL_{12}\cdot SL_{13}, \tag{42}$$

$$SR_2 = SL_{12}\cdot SL_{23} - SL_{13}\cdot SL_{22}, \tag{43}$$

$$SR_3 = SL_{23}\cdot SL_{14} - SL_{13}\cdot SL_{24}, \tag{44}$$

$$SR_4 = -SL_{23}\cdot SL_{15} - SL_{13}\cdot SL_{25}, \tag{45}$$

$$SS_1 = SL_{12}\cdot SL_{34} - SL_{14}(SL_{33}+SI\omega^2) \tag{46}$$

$$SS_2 = SL_{34}\cdot SL_{23} - SL_{24}(SL_{33}+SI\omega^2), \tag{47}$$

$$SS_3 = SL_{34}\cdot SL_{34} - (SL_{33}+SI\omega^2)(SL_{44}+SI\omega^2); \tag{48}$$

$$SS_4 = -SL_{34}\cdot SL_{35} - SL_{45}(SL_{33}+SI\omega^2 \tag{49}$$

$$ST_1 = SL_{11}\cdot SL_{34} - SL_{13}\cdot SL_{14} \tag{50}$$

$$ST_2 = SL_{12}\cdot SL_{34} - SL_{13}\cdot SL_{24} \tag{51}$$

$$ST_3 = SL_{14}\cdot SL_{34} - SL_{13}(SL_{44}+SI\omega^2) \tag{52}$$

$$ST_4 = -SL_{34}\cdot SL_{15} - SL_{13}\cdot SL_{45} \tag{53}$$

$$SA_1 = SR_1\cdot SS_2 - SR_3\cdot SS_1 \tag{54}$$

$$SA_2=SR_2\cdot SS_3-SR_3\cdot SS_2 \quad (55)$$

$$SA_3=SR_4\cdot SS_3-SR_3\cdot SS_4 \quad (56)$$

$$SB_1=SS_1\cdot ST_3-SS_3\cdot ST_1 \quad (57)$$

$$SB_2=SS_2\cdot ST_3-SS_3\cdot ST_2 \quad (58)$$

$$SB_3=SS_4\cdot ST_3-SS_3\cdot ST_4 \quad (59)$$

$$SC_1=SA_2\cdot SB_1-SA_1\cdot SB_2 \quad (60)$$

$$SC_2=-SA_1\cdot SB_3+SA_3\cdot SB_1 \quad (61)$$

$$SC_3=SA_3\cdot SB_2-SA_2\cdot SB_3 \quad (62)$$

$$SD_1=SL_{11}\cdot SC_3-SL_{12}\cdot SC_2-SL_{15}\cdot SC_1, \quad (63)$$

$$SD_2=SL_{13}\cdot SC_3-SL_{23}\cdot SC_2-SL_{35}\cdot SC_1, \quad (64)$$

$$SF_1=SL_{13}\cdot SL_{34}-SL_{14}(SL_{33}+SI\omega^2) \quad (65)$$

$$SF_2=(SL_{33}+SI\omega^2)D_1-SL_{13}\cdot D_2 \quad (66)$$

$$SF_3=-SL_{14}\cdot SD_2+SL_{34}\cdot SD_1 \quad (67)$$

夏传友同志协助完成了程序编制及数值计算。

致谢：本课题得到冶金部教育司的支持，特此致谢。

ON THE VIBRATION OF COMPOSITE MATERIAL PIPES CONTAINING FLOWING FLUID

Wen Lizhou

Deparlment of Applied Mechanics.
Wuhan Iron and Steel University. Wuhan. China

ABSTRACT

In this paper, the problem of free vibration of a composite material pipe containing flowing fluid is discussed. The pipe is made in multi-layer and the layers are so numerous that a designer can set A_{16}, A_{26}, B_{16}, B_{26}, D_{16}, D_{26}, and C_{45} to vanish. Consequently, the pipe may be regarded as an orthotropic cylindrical shell.

By introducing a function of displacement, the governing equations, including the effects of transverse shear deformation and rotary inertia for an orthotropically laminated cylindrical shell in Ref.[1] are reduced to a single differential equation. On the basis of such a formula [2] calculating the disturbing pressure on the pipe wall, the frequency equation of an infinitely long pipe containing flowing fluid is obtained.

As an example, a water pipe is considered. The numerical calculation shows tht the free vibration frequencies of an empty pipe are higher than those of a pipe filled with water. The dependence of freqencies of free vibration on average flowing velocity U is calculated and listed in the attached table.

Key words: composite material pipes, flowing fluid, vibration