Î¬ÆÕ×ÊÑ¶ http://www.cqvip.com

第 39 卷 第 5 期 2003 年 5 月 499—504 页
金属学报 ACTA METALLURGICA SINICA
Vol.39 No.5 May 2003 pp.499–504

等离子与钨极双面电弧焊接热过程的数值模拟 *

孙俊生 [1,2] 武传松 [2]
1) 山东大学材料液态结构及其遗传性教育部重点实验室，济南 250061
2) 哈尔滨工业大学现代焊接生产技术国家重点实验室，哈尔滨 150001

摘 要 利用由等离子电弧 (PAW) 与钨极电弧 (TIG) 构成的单电源双面电弧焊接 (DSAW) 工艺可以获得深宽比较大的焊缝，该工艺具有高效、低成本的特点，是一种先进焊接技术. 本文综合考虑影响等离子弧小孔形成的等离子流力、重力、表面张力等力学因素，建立了小孔形成过程的数学模型，并以此为基础建立了 DSAW 电流密度分布和焊接传热的控制方程. 采用数值模拟技术对上述方程进行耦合求解，定量分析了双面电弧焊接条件下的传热规律及热影响区性能，同时作为对比也模拟了 PAW 焊接的传热现象，揭示了 DSAW 大幅度增加熔深、改善热影响区性能的机理，为工艺参数优化设计提供了依据.

关键词 双面电弧焊接，温度场，热影响区，数值模拟
中图法分类号 TG402, I242.2 **文献标识码** A **文章编号** 0412−1961(2003)05−0499−06

NUMERIC SIMULATION OF HEAT TRANSFER PROCESS IN DOUBLE–SIDED ARC (PAW+TIG) WELDING

SUN Junsheng[1,2], *WU Chuansong*[2]
1) MOE Key Laboratory for Liquid Structure and Heredity of Materials, Shandong University, Jinan 250061
2) National Key Laboratory of Advanced Welding Production Technology of Harbin Institute of Technology, Harbin 150001
Correspondent: SUN Junsheng, professor, Tel: (0531)8395987, Fax: (0531)8392711, E-mail: mstsun@sdu.edu.cn

Supported by National Natural Science Foundation of USA (No.DMI 9812981)
Manuscript received 2002–07–12, in revised form 2002–10–16

ABSTRACT Comparatively deep and wide welds can be attained in double–sided arc welding (DSAW) with single power supply consisting of PAW (plasma–arc) and TIG (tungsten–arc). PAW+TIG double–sided arc welding is an advanced manufacturing technology with the performance of high efficiency and low cost. The mathematic models of keyhole formation are established after synthetically considering the dynamic factors, such as plasma arc pressure, gravity and surface tension etc., which affect the keyhole formation in plasma–arc welding. On the basis of those models, the cybernetic equations describing the current density distribution and heat transfer of DSAW are relatively established. Coupling consequences of those equations can be attained with the numeric simulation technology. Furthermore, rules of heat transfer and performance of HAZ in double–sided arc welding are quantitatively analyzed. Meanwhile, as a comparison, the phenomenon of heat transfer in PAW is also simulated. Consequently, the principles of greatly deepening weldpool and improving HAZ performance are disclosed and the bases for designing and optimizing the welding process parameters are provided.

KEY WORDS double–sided arc welding (DSAW), temperature field, heat affect zone numeric simulation

目前对厚度比较大的金属焊接结构通常采用开坡口多层焊工艺制造. 开坡口占用机时和人力，填充坡口消耗大量的焊接材料，所以中厚板多层焊焊接生产率低、产品成本高，还容易导致层间夹渣和热影响区扩大等问题. 虽然激光焊和电子束焊焊缝的深宽比较大，但其工艺和设备造价高昂，对工件装配精度要求高，难以大面积推广应用. 美国 Kentucky 大学 Zhang 等 [1] 发明了一种能显著增加熔深且成本低廉的单电源双面电弧焊接工艺 (DSAW)，可以实现中等厚度板不开坡口直接对接焊接，但目前对其电弧物理、熔池形态、工艺参数对焊缝成形和热影响区组织

* 美国国家自然科学基金资助项目 DMI 9812981
收到初稿日期：2002–07–12，收到修改稿日期：2002–10–16
作者简介：孙俊生，男，1963 年生，教授，博士

Î¬ÆÕ×ÊÑ¶ http://www.cqvip.co

性能的影响规律尚不清楚，阻碍了该工艺的工程应用. 在等离子电弧 (PAW) 与钨极电弧 (TIG) 双面电弧焊接过程中，小孔的稳定建立关系到焊接工艺过程稳定和焊接质量的可靠性，小孔现象是该工艺过程的重要特征. 目前人们对小孔的形成过程仅停留在定性认识阶段 [2]，即使是常规单面等离子弧焊接 PAW，其小孔形成过程的研究文献也不多见，文献 [2] 研究了固定电弧作用下二维传热与熔池流体流动的情况，与实际情况相差较远. 在 PAW+TIG 双面电弧焊接研究方面，采用数值模拟技术研究了传热问题，为了使模型简化，小孔的形状和尺寸采用了激光频闪视觉检测实验测试的数据，并且假定为圆柱状 [3]，这样的模型通用性比较差.

本文综合考虑影响等离子弧小孔形成过程的力学因素和传热过程，建立小孔形成过程的数学模型，并与焊接传热的控制方程耦合，采用数值模拟技术分析了 PAW+TIG 双面电弧焊的传热规律及热影响区性能，作为对比同时分析了常规单面 PAW 电弧作用下的温度场，为其工艺优化设计和推广应用奠定基础.

1 模型的建立

由等离子电弧 (PAW)+ 钨极电弧 (TIG) 构成的双面电弧焊接 (DSAW) 系统示意图及坐标系见文献 [4] 中图 1. 工件上面是 PAW 焊枪，下面是 TIG 焊枪，工件处于平焊位置. 这两把焊枪直接连在一套变极性等离子焊接电源的两个输出端上，构成单电源双面电弧焊接系统. 焊接过程中，TIG 和 PAW 电弧均以相同速度 u_0 沿 x 方向运动. 当小孔稳定建立起来后，PAW 一侧的电弧压力较大，该侧熔池的液态金属会通过小孔流入 TIG 一侧的熔池，使得 PAW 一面的熔池凝固后沿焊接方向产生一个沟槽，而 TIG 一面的熔池凝固后形成焊缝余高. 坐标系 o–xyz 为以与电弧相同速度运动的动坐标系，它的原点 o 取在电极的中心线与工件底面的交点上. 坐标系 o'–$x'yz$ 为固定坐标系.

1.1 熔池表面变形与小孔形成过程的数学描述

DSAW 小孔未形成时熔池纵截面几何形状的示意图见文献 [4] 中图 2. 工件上表面 PAW 一侧的熔池在等离子流力 p_p、重力 $\rho g\psi$、表面张力 γ 的作用下产生变形. 根据变分法原理，经系列推导可得出如下 PAW 熔池表面变形的控制方程 [5,6]，

$$p_\mathrm{p}-\rho g\psi+\lambda_\mathrm{p} = -\gamma\frac{(1+\psi_y^2)\psi_{xx}-2\psi_x\psi_y\psi_{xy}+(1+\psi_x^2)\psi_{yy}}{(1+\psi_x^2+\psi_y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1)$$

式中 ρ 为液态金属的密度，g 为重力加速度，ψ 为熔池表面形状函数，λ_p 为 Laplace 变换因子，λ_p 的物理意义是除了 $p_\mathrm{p}, \rho g\psi, \gamma$ 之外的所有作用于熔池表面的力的平均值. 本文作者在文献 [4] 中为了计算方便，把等离子流力 p_p 假定为 Gaussian 分布. 本文在计算出电流密度 J 分布的基础上，其电弧压力 p_p 由 $p_\mathrm{p}=\frac{\mu_0 IJ}{4\pi}$ 求出 [5]，其中 μ_0 为磁导率，I 为焊接电流. 电弧压力影响熔池的几何形状，熔池的几何形状又会影响到电流密度的分布，计算时两者需要动态双向耦合.

DSAW 小孔形成前后熔池纵截面几何形状的示意图见文献 [4] 中图 3. 在所示的坐标系下，工件 TIG 侧熔池的表面变形方程如下

$$-p_\mathrm{T}+\rho g(\psi-H)+\lambda_\mathrm{T} = -\gamma\frac{(1+\psi_y^2)\psi_{xx}-2\psi_x\psi_y\psi_{xy}+(1+\psi_x^2)\psi_{yy}}{(1+\psi_x^2+\psi_y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2)$$

式中，p_T 为 TIG 电弧压力，λ_T 为其 Laplace 变换因子，H 为工件厚度. 小孔形成后，上、下两个熔池连为一体，将其作为一个熔池处理，该熔池纵截面几何形状与坐标系见文献 [4] 中图 3. 作用于熔池表面上的力有等离子流力 p_p、TIG 电弧压力 p_T、重力 $\rho g\psi$、表面张力 γ，熔池表面变形的控制方程为 [6,7]，

$$p_\mathrm{p}-p_\mathrm{T}+\rho g\psi+\lambda = -\gamma\frac{(1+\psi_y^2)\psi_{xx}-2\psi_x\psi_y\psi_{xy}+(1+\psi_x^2)\psi_{xy}}{(1+\psi_x^2+\psi_y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3)$$

熔池表面变形控制方程 (1), (2), (3) 的边界条件为

$$\psi(x,y)=0, \quad T\le T_\mathrm{L} \quad (4)$$

式 (4) 中 T_L 为被焊件材料的液相线温度. 式 (4) 的物理意义是工件表面固相区域没有变形. 计算时，熔池未穿孔则采用方程 (1) 和 (2) 确定上、下熔池的表面变形，小孔形成后则用方程 (3) 确定熔池表面变形和小孔的形状和尺寸. ψ 为熔池表面及小孔边界 (与电弧的交界面) 的形状函数，x, y 不同，ψ 值也不同，ψ 可能定出小孔尺寸、形状.

1.2 电流密度的分布模型

把工件上、下表面之间的区域作为求解区域，该区域包括固态和液态金属以及电弧弧柱. 在该求解区域，电流密度的分布可用稳态的 Maxwell 方程描述 [8]

$$\nabla\cdot\vec{J}=0 \quad (5)$$

式 (5) 中 ∇ 为场论中的 Hamilton 算子. 根据 Ohm 定律，电流密度由下式确定 [9]

$$\vec{J}=-\sigma\nabla\phi \quad (6)$$

Î¬ÆÕ×ÊÑ¶ http://www.cqvip.co

式中，ϕ 为电势，σ 为电导率. 将式 (6) 代入式 (5) 得到方程 (5) 的 Laplace 形式

$$\nabla^2\phi = 0 \tag{7}$$

工件上、下表面边界流入、流出的电流密度采用 Gaussian 分布模式，即控制方程 (7) 的边界条件为

$$\left.\begin{array}{ll} \text{上表面} & \frac{\partial\phi}{\partial n} = -\frac{1}{\sigma}\frac{I}{\pi r_{\mathrm{jp}}^2}\exp(-\frac{r^2}{r_{\mathrm{jp}}^2}) \\ \text{下表面} & \frac{\partial\phi}{\partial n} = \frac{1}{\sigma}\frac{I}{\pi r_{\mathrm{jT}}^2}\exp(-\frac{r^2}{r_{\mathrm{jT}}^2}) \\ \text{其他表面} & \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \end{array}\right\} \tag{8}$$

式中，$\frac{\partial}{\partial n}$ 表示沿工件表面法向的偏微分，I 为总的焊接电流，r_{jp} 为上表面 PAW 侧电流分布 (流出的) 半径 (本文计算时取值 1.094 mm[10])，r_{jT} 为下表面 TIG 侧电流分布 (流入的) 半径 (本文计算时取值 2.620 mm[10])，$r = \sqrt{x^2+y^2}$. 求解上述方程 (6), (7) 和 (8) 可确定电流密度.

1.3 DSAW 的传热模型

在小孔的形成过程中，工件正、反面的熔池表面均发生了严重变形，本文采用适合于熔池表面变形的非正交帖体曲线坐标系解决这一问题 [11]. 即令

$$x = x, \quad y = y, \quad z^* = \frac{z-\psi(x,y)+H}{H} \tag{9}$$

式中，$\psi(x,y), \psi(x,y)-H$ 分别是工件上表面和下表面 (包括熔池上、下表面的边界) 的曲面方程，H 为工件厚度. 在直角坐标系 o–xyz 和非正交贴体曲线坐标系 o–xyz^* 下，描述焊接传热的能量方程分别为式 (10) 和 (11)

$$\rho c_p(\frac{\partial T}{\partial t} - u_0\frac{\partial T}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}(\kappa\frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\kappa\frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\kappa\frac{\partial T}{\partial z}) \tag{10}$$

$$\rho c_p(\frac{\partial T}{\partial t} - u_0\frac{\partial T}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}(\kappa\frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\kappa\frac{\partial T}{\partial y}) + S\frac{\partial}{\partial z^*}(\kappa\frac{\partial T}{\partial z^*}) + C_i\kappa \tag{11}$$

其中

$$C_i = 2(\frac{\partial z^*}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial x\partial z^*} + \frac{\partial z^*}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial y\partial z^*})$$

$$S = (\frac{\partial z^*}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z^*}{\partial y})^2 + (\frac{\partial z^*}{\partial z})^2$$

κ 为导热系数，c_p 为定压比热容，t 为时间，T 为温度. 能量方程的边界条件如下，工件上表面为

$$-\kappa\cdot\nabla T\cdot\vec{n}_{\mathrm{b}} = q_{\mathrm{pq}} \tag{12}$$

$$q_{\mathrm{pq}} = \frac{\eta_{\mathrm{p}} I U_{\mathrm{p}}}{2\sigma_{\mathrm{pq}}^2}\exp(-\frac{r^2}{2\sigma_{\mathrm{pq}}^2}) \tag{13}$$

工件下表面为

$$-K\cdot\nabla T\cdot\vec{n}_{\mathrm{b}} = q_{\mathrm{pT}} \tag{14}$$

$$q_{\mathrm{pT}} = \frac{\eta_{\mathrm{T}} I U_{\mathrm{T}}}{2\sigma_{\mathrm{pT}}^2}\exp(-\frac{r^2}{2\sigma_{\mathrm{pT}}^2}) \tag{15}$$

其中，$\vec{n}_{\mathrm{b}}$ 为工件表面的单位法向矢量，η_{p} 和 η_{T} 分别为 PAW 和 TIG 电弧的热效率，$\sigma_{\mathrm{pq}}, \sigma_{\mathrm{pT}}$ 分别为 PAW 和 TIG 电弧的热流密度分布参数，本文计算取值见文献 [4]; U_{p} 和 U_{T} 分别为 PAW 电弧和 TIG 电弧的电压.

2 实验结果与讨论

对 18–8 不锈钢试件的 DSAW 焊接热过程进行了数值分析. 试件尺寸为 150 mm × 80 mm×9.5 mm. 焊接工艺参数为：PAW 喷嘴直径为 1.57 mm, PAW 和 TIG 电极直径均为 4.8 mm, PAW 电极和 TIG 电极端部到工件表面的距离分别为 6 和 10 mm, 焊接电压为 45 V, 焊接电流为 67 A, 焊接速度为 1.3 mm/s. 为了进行比较，同时计算了常规单面等离子弧焊接 PAW 的温度场 (焊接工艺参数为：电极直径为 4.8 mm, 电极端部到工件表面的距离为 6 mm, 焊接热输入与 DSAW 焊接的相同).

图 1 和图 2 分别为相同焊接热输入条件下 DSAW 和 PAW 焊接工件内温度分布的计算结果，图中描述温度场的坐标系采用动坐标系，图中的 x' 轴为固定坐标系 o'–$x'yz$(见图 1) 的 x' 轴，x' 轴上的符号 ∇ 表示开始焊接的位置. 可以看出，对于 DSAW 焊接，焊接 1.75 s 后，焊接温度场达到准稳态，此时电弧离开开始焊接处 2.275 mm[4]. 在小孔形成之后，焊件上的高温区域集中在电弧中心线附近. 而从图 2 常规单面 PAW 焊接温度场的计算结果可以看出，在此条件下工件没有熔透，熔深只有 4.5 mm, 温度分布与 DSAW 焊接的情况有显著差异. 产生以上较大差异的原因是由于 DSAW 焊接电流直接沿厚度方向流过焊件，焊接电弧被导入小孔，电流分布比较集中，使电弧受压缩的程度增加，从而补偿了等离子流穿透工件时的能量消耗，大大提高了等离子弧的穿透能力.

图 3 为 DSAW 电流密度分布的计算结果，图中 x' 轴和符号 ∇ 的意义同图 1, 2, 结果表明工件上表面在以电弧中心线为中心、半径 0.3 mm 的区域之内，电流密度在 10^8 A/m^2 以上、工件上表面离开电弧中心线 2.0 mm 时，电流密度降为 10^6 A/m^2. 电流主要分布在以电弧中心线为中心，半径为 2.0 mm 的区域之内. 在该工艺条件下，熔池达到准稳态时，小孔的半径为 0.5 mm, 有 89.5% 的电流从小孔中流过.

图 4 是在相同焊接热输入条件下，DSAW 和 PAW 焊接试件横截面 “敏化区” 的计算结果. 敏化区是不锈钢

Î¬ÆÕ×ÊÑ¶ http://www.cqvip.co

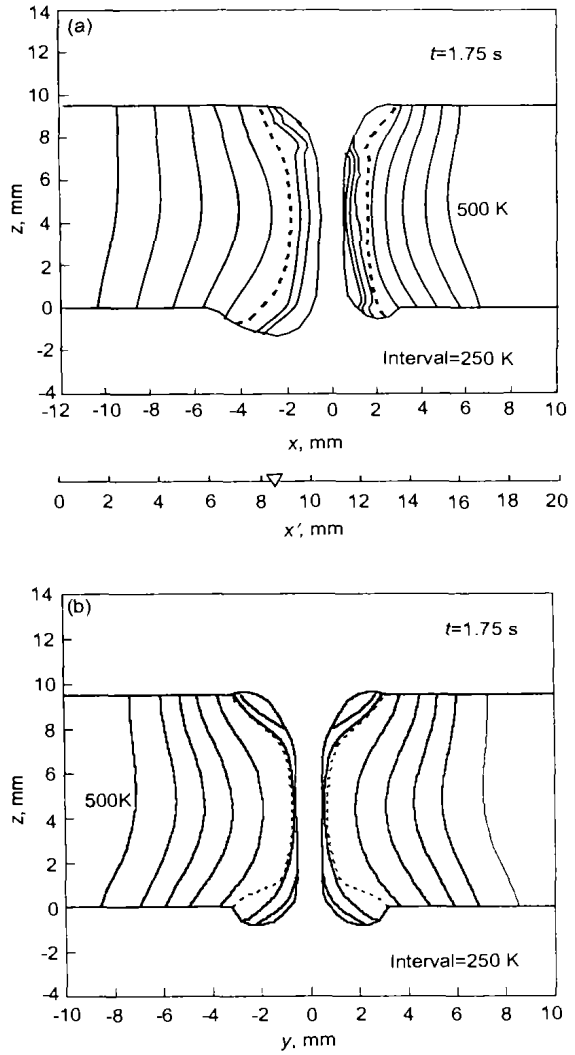

图 1 DSAW 焊件内温度分布的计算结果 (图中虚线是温度为熔点 T_m 的等温线)

Fig.1 Computed temperature distributions in DSAW weldment(Dotted curves indicate the solid–liquid interfaces)
(a) longitudinal section at y=0
(b) transverse cross-section at x=0

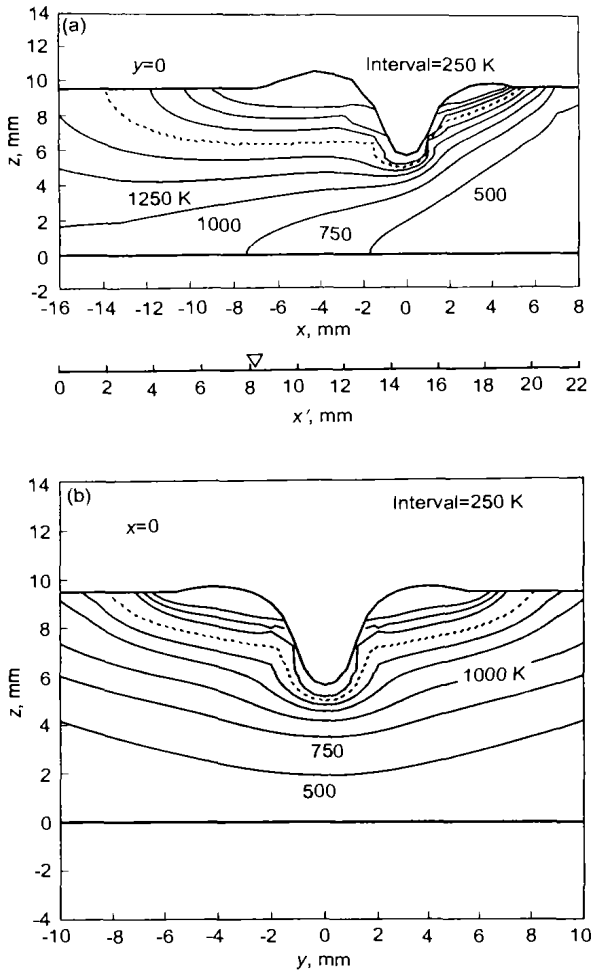

图 2 PAW 焊件内温度分布的计算结果 (图中虚线是温度为熔点 T_m 的等温线)

Fig.2 Computed temperature distributions in PAW weldment (Dotted curves indicate the solid–liquid interfaces)
(a) longitudinal section at y=0
(b) transverse cross-section at x=0

产生 "刀状腐蚀" 的敏感区域, 焊接条件下其温度范围为 873—1323 K. 这一区域越大, 产生 "刀状腐蚀" 的可能性越大. 计算结果表明, 采用 DSAW 焊接, 敏化区的面积为 26.17 mm^2, 而 PAW 焊接时敏化区面积为 48.80 mm^2. 所以, 不锈钢试件采用 DSAW 焊接, 可以大大减小敏化区面积和 "刀状腐蚀" 的敏感性.

图 5 为焊接热输入对敏化区面积影响的计算结果. 可见, 随着热输入的增加, DSAW 和 PAW 焊接敏化区的面积均增加, 但 PAW 焊接的敏化区面积增加速度较快. 事实上, 在 PAW 焊接中, 热输入随着焊接电流的增加而增大, 热输入增大使得喷射等离子体温度增加, 等离子弧压力也增加. 等离子弧压力的增加使扩张力增大, 这就导致了电流和电弧区域的扩展. 同时, 等离子弧压力的增大将使熔池表面变形加剧, 从而使电弧和热输入分布扩大. 因此, PAW 焊接随着热输入的增加, 敏化区面积增加的较快. 而在 DSAW 焊接中, 当电流接近工件时, 由于电流不用像一般电弧焊那样必须改变方向, 所以电流不扩张. 因此, DSAW 焊接的电磁力是收缩力. 同样, 表面变形不影响电流沿着板厚方向的流动, 因而也就不会使电弧和热输入区域扩大. 这样一来, 在 DSAW 焊接中, 当电流增加时, 热输入的分布区域不会像在 PAW 焊接中那样显著增加. 当然, 热输入的增加必然导致焊接区温度的增加, 从而使得敏化区增大. 因此, DSAW 焊接敏化区随着热输入增加, 以较慢的速度增加.

Î¬ÆÕ×ÊÑ¶ http://www.cqvip.com

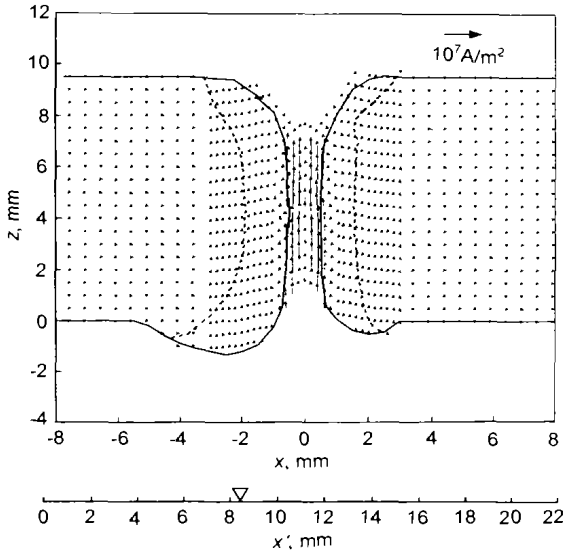

图 3　DSAW 电流密度分布的计算结果 (y=0 纵向截面)

Fig.3　Computed result of current density distribution in the DSAW (Longitudinal section at y=0 mm)

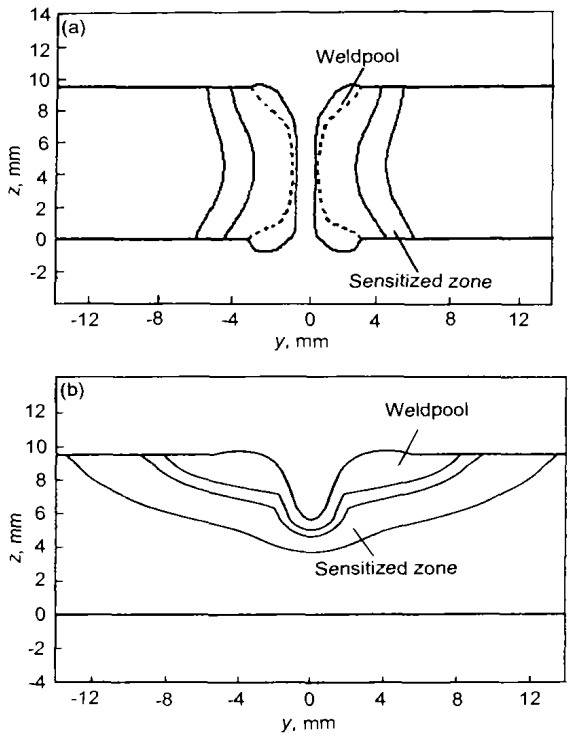

图 4　相同焊接热输入下敏化区的计算结果 (焊接热输入为 23.19 kJ/cm)

Fig.4　Computed sensitization zones in DSAW and PAW weldements at x=0 mm (Heat input: 23.19 kJ/cm) (a) DSAW　(b) PAW

图 6 为采用不同热输入进行 DSAW 焊接时熔合区焊接热循环的计算结果. 当热输入分别为 23, 27, 34 kJ/cm 时，冷却过程在“敏化区”的停留时间 (在纵坐标上找出

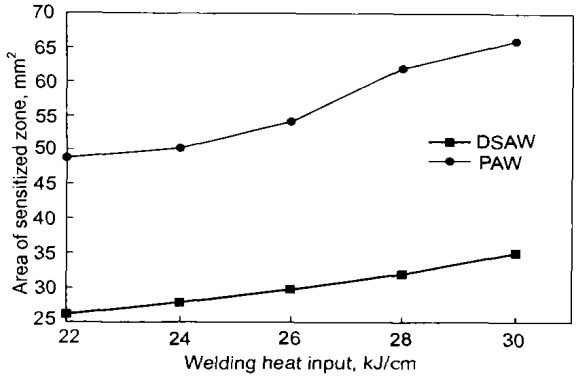

图 5　焊接热输入对敏化区面积的影响

Fig.5　Effect of heat input on the sensitization zone (The sensitization zone was computed for the transverse cross-section taken at y=0)

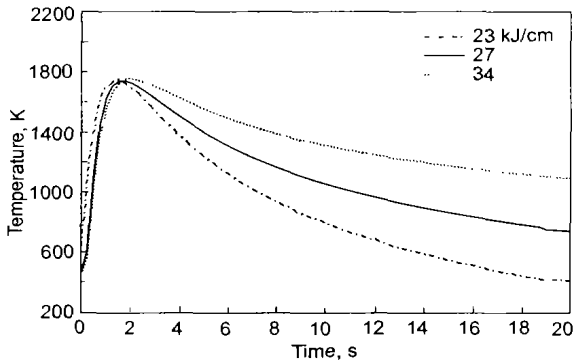

图 6　不同焊接热输入下 DSAW 熔合区热循环的计算结果

Fig.6　Thermal histories of fusion interface under different heat inputs in DSAW

873 和 1323 K, 画两条水平线与热循环曲线相交的两点，这两点在横轴上的距离为停留时间) 分别为 4.50, 9.05 和 36.25 s, 可见随着焊接热输入的提高，焊件在“敏化区”停留的时间迅速增大，其对“刀状腐蚀”的敏感性提高. 因此，在保证全熔透的前提下，应把热输入控制到最低点. 如采用 DSAW 焊接 9.5 mm 厚的板，建议采用 23 kJ/cm 的焊接热输入，冷却过程的敏化持续时间大约为 4.50 s. 然而，对 PAW 焊接，当热输入分别为 23, 27, 34 kJ/cm 时，冷却过程的敏化持续时间分别增至 8.46, 14.50 和 47.35 s.

图 7 是相同焊接热输入条件下，DSAW 和 PAW 焊接试件在厚度方向上温度分布的计算结果. 可以看出，DSAW 焊接时板厚方向上的温度梯度很小，所以非常有利于减小工件热变形.

文献 [4] 中图 9 比较了 DSAW 焊缝横截面几何形状的计算与实测结果，可见两者吻合情况良好.

Î¬ÆÕ×ÊÑ¶ http://www.cqvip.co

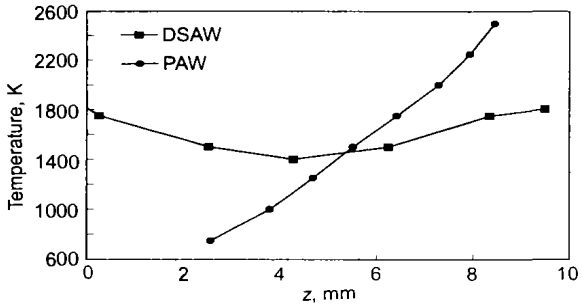

图 7 DSAW, PAW 试件沿板厚方向温度分布的计算结果 (焊接热输入 23.19 kJ/cm)

Fig.7 Computed temperature profiles along the thickness direction in DSAW and PAW weldments (Heat input: 23.19 kJ/cm, x=−3, y=0)

3 结论

(1) 本文综合考虑影响等离子弧小孔形成的等离子流力、重力、表面张力等力学因素，建立了小孔形成过程的数学模型，并以此为基础建立了 DSAW 焊接电流密度和传热的控制方程. 通过 DSAW 工艺实验验证了模型的可靠性.

(2) 数值模拟结果表明，DSAW 焊件上的高温区域集中在电弧中心线附近，并且在工件厚度方向的温度梯度明显比常规单面 PAW 工件的小，这对于减小热影响区和工件热变形、降低能量消耗非常有利. 这主要是由于 DSAW 强迫电流沿工件厚度方向流过造成的.

(3) 计算表明，本文条件下，DSAW 的焊接电流主要分布于以电弧中心线为中心，半径为 2.0 mm 的区域之内. 熔池达到准稳态时，小孔的半径为 0.5 mm，有 89.5% 的电流从小孔中流过.

(4) 在相同焊接热输入 (23.19 kJ/cm) 条件下，采用 DSAW 焊接工艺焊接 9.5 mm 的不锈钢试件，获得了全熔透、且深宽比合适的焊缝；而 PAW 在这个热输入条件下工件没有熔透，熔深仅为 4.5 mm.

(5) 采用 DSAW 焊接不锈钢试件，相同热输入条件下，其“敏化区”面积比 PAW 焊接的小，并且“敏化区”面积随热输入增加的速度也小于 PAW 的. 进行 DSAW 焊接时尽可能采用较小的热输入，这对于减小冷却过程的敏化持续时间有利.

本文作为国际合作课题得到美国国家自然科学基金 (DMI 9812981) 和美国肯塔基大学 (Center for Robotics and Manufacturing Systems, University of Kentucky) Zhang Y M 博士的大力协助，特致谢忱.

参考文献

[1] Zhang Y M, Zhang S B. *Weld J*, 1998; 77: 57
[2] Fan H G, Kovacevic B. *J Phys D: Appl Phys*, 1999; 32: 2902
[3] Sun J S, Wu C S, Zhang Y M. *Acta Phy Sin*, 2002; 51: 286
(孙俊生，武传松，Zhang Y M. 物理学报，2002; 51: 286)
[4] Sun J S, Wu C S, Dong B L. *Acta Metall Sin*, 2002; 39: 79
(孙俊生，武传松，董博铃. 金属学报，2002; 39: 79)
[5] Lin M L, Eagar T W. *Metall Trans*, 1986; 17B: 601
[6] Wu C S, Dorn L. *J Eng Manuf*, 1995; 209(B3): 221
[7] Wu C S, Dron L. *Acta Metall Sin*, 1997; 33: 774
(武传松，Dorn L. 金属学报，1997; 33: 774)
[8] Zhou S S. *Basal Tutorial of Electromagnetic Field*. Beijing: Higher Education Press, 1985: 104
(周省三. 电磁场基本教程. 北京：高等教育出版社，1985: 104)
[9] Coletta V. *College Physics*. Boston, MA: McGraw–Hill, 1995
[10] Bashenko V V, Sosnin N A. *Weld J*, 1988; 67: 233
[11] Wu C S, Cao Z N, Wu L. *Acta Metall Sin (Eng Ed)*, 1993; 6: 130